

*Д. А. Карпов, канд. техн. наук, Институт кибернетики
Российского технологического университета (МИРЭА), г. Москва,
Karpov@mirea.ru*

*В. И. Струченков, докт. техн. наук, Институт кибернетики
Российского технологического университета (МИРЭА), г. Москва,
str1942@mail.ru*

Вариационные задачи в проектировании трасс линейных сооружений

В данной статье задачи оптимизации трасс, возникающие в САПР линейных сооружений, классифицируются как вариационные и сводятся к минимизации функционалов при наличии ряда ограничений на вид и параметры искомой экстремали. Искомое проектное решение независимо от вида сооружения (железные и автомобильные дороги, трубопроводы различного назначения, каналы оросительной сети и др.) представляет собой сплайн, то есть плоскую кривую, состоящую из элементов заданного вида. В отличие от задач, рассматриваемых в теории сплайнов, возможные границы элементов и даже их число не известно. Проектируемый сплайн обладает рядом других особенностей, что не позволяет использовать методы нелинейного программирования. В импортных САПР линейных сооружений и их российских аналогах проектные решения тем или иным способом назначаются проектировщиками. Предложенный отечественными исследователями альтернативный подход, принятый в данной статье, состоит в переходе к компьютерной выработке проектных решений на основе математических моделей, алгоритмов оптимизации и проектирующих программ. Излагается новый алгоритм аппроксимации последовательности точек на плоскости сплайном, состоящим из отрезков прямых, клотоид и окружностей, как это требуется при проектировании трасс дорог и других линейных сооружений.

Ключевые слова: функционал, экстремаль, сплайн, система ограничений, динамическое программирование, нелинейное программирование.

Введение

Трасса линейного сооружения — это пространственная кривая, которая традиционно представляется двумя плоскими кривыми: планом и продольным профилем.

Проекция трассы на горизонтальную плоскость XOY называется ее планом, а продольный профиль трассы — это график зависимости координаты Z от длины кривой в плане s , вычисляемой от начальной точки до текущей.

Каждому варианту плана трассы соответствует продольный профиль земли и множество вариантов проектной линии продольного профиля.

Требования безопасной и нормальной эксплуатации сооружения выражаются в наличии множества ограничений на положение трассы и ее параметры. Прежде всего, это условия гладкости, то есть ограничения на первые и вторые производные.

Поскольку варианты трассы сравниваются количественно, например по приведенным затратам на строительство и эксплуатацию сооружения [1], можно считать, что каждому допустимому варианту трассы соответствует число, которое нужно минимизировать. Другими словами, на множестве допустимых трасс, соединяющих две заданные точки, задан функционал и требуется

найти трассу, при которой его значение минимально. Это задача вариационного исчисления [2, 3].

Формально задача поиска оптимальной трассы может быть записана в интегральной форме:

$$I(C) = \int_C F(x(s), y(s), z(s)) ds \rightarrow \inf. \quad (1)$$

Здесь C — пространственная кривая (ось трассы), $I(C)$ — криволинейный интеграл 1 рода, а $F(x, y, z) ds$ — функция, определяющая затраты на элементе длины ds . Требуется найти кривую, для которой $I(C)$ принимает наименьшее значение.

Функция $F(x, y, z)$ выражает, в частности, затраты на земляные работы, которые зависят от объемов работ, категорий грунтов, распределения земляных масс, способов производства работ и др. В реальной постановке приходится считаться с тем, что мы не имеем аналитического выражения $F(x, y, z)$ в (1) и адекватных моделей вариационной задачи.

Отмеченные сложности, к которым следует добавить и многочисленные ограничения в виде неравенств, не позволяют использовать методы классического вариационного исчисления. Поэтому работы по автоматизации проектирования таких сложных сооружений, как железные и автомобильные дороги, начинались с решения на ЭВМ вспомогательных задач, а варианты положения трассы в плане и в профиле назначались вручную.

История создания систем автоматизированного проектирования (САПР) дорог весьма поучительна.

Первые системы были разработаны в конце 50-х — начале 60-х гг. прошлого века в США (система MIT), в Англии (система CARD) и во Франции (система TEGI). ЭВМ того времени были маломощными, но тем не менее в этих системах была возможность визуализации процесса и организации интерактивного проектирования.

В нашей стране в то время не было технической возможности создания подоб-

ного рода систем. Поэтому еще в начале 60-х годов прошлого века в Институте кибернетики АН УССР совместно с ЦНИИС Минтрансстроя СССР была поставлена задача разработки математических моделей, алгоритмов и программ проектирования оптимального продольного профиля при заданном варианте положения трассы в плане [4, 5].

Первые попытки решения этой задачи, основанные на эвристических упрощениях динамического программирования, которые потребовались из-за недостаточной мощности ЭВМ, оказались не столь успешны, как ожидалось [1]. Более продуктивной оказалась реализация алгоритма нелинейного программирования с детальным учетом особенностей системы ограничений [1]. Соответствующая программа проектирования продольного профиля новой железной дороги была разработана для лучшей из доступных в то время ЭВМ БЭСМ-4. При объеме оперативной памяти 4096 ячеек (45-разрядных) решалась задача минимизации нелинейной функции (модель строительных затрат) от 100 переменных при наличии 400 линейных ограничений в виде неравенств [1]. Несмотря на то, что БЭСМ-4 малоприспособна для автоматизации проектирования из-за недостаточного объема оперативной памяти и быстродействия, эта программа нашла широкое применение при проектировании БАМа. Время одного расчета на БЭСМ-4 было в среднем сопоставимо со временем наработки на отказ. Тем не менее в трех проектных институтах, имевших эту ЭВМ, суммарно было запроектировано около 1200 км продольного профиля по трассе БАМа [1].

Была практически подтверждена высокая экономическая эффективность использования математически корректных алгоритмов и проектирующих программ по сравнению как с проектированием вручную, так и с применением упрощенных моделей и эвристических алгоритмов [1].

В дальнейшем были созданы и получили практическое применение аналогичные про-

граммы проектирования продольного профиля новых и реконструируемых автодорог [6].

С появлением персональных компьютеров IBM PC AT 386 были реализованы теоретические разработки 1980-х гг. и разработана программа оптимизации трассы новой железной дороги как пространственной кривой, на участках напряженного хода [7]. Экспериментально было установлено, что эффект от совместного проектирования плана и продольного профиля в несколько раз выше, чем при оптимизации профиля по назначаемым вручную вариантам плана трассы.

К сожалению, в 1990-х гг. в нашей стране исследования в данной области были практически полностью прекращены из-за отсутствия финансирования, коллективы исследователей были распущены, многие алгоритмы и программы для таких ЭВМ, как Минск-32 и ЕС, утрачены.

В настоящее время в практике проектирования дорог в Российской Федерации используются импортные САПР или их отечественные аналоги [8–12]. В этих системах есть визуализация промежуточных и конечных результатов, изготовление чертежей и др., что существенно облегчает и ускоряет процесс интерактивного проектирования, но не обеспечивает нахождение оптимальных проектных решений.

В новой САПР [6] реализован альтернативный подход, и проектирование продольного профиля выполняется совместно с проектированием поперечных профилей земляного полотна с учетом использования всех или части слоев грунта выемок для сооружения насыпей [6]. С этой целью применяются более сложные модели строительных затрат и методы нелинейного программирования, чем это было в программах для БЭСМ-4 и ЕС ЭВМ. Корректное решение стоимостной задачи обеспечивает качество компьютерных проектных решений в условиях как равнинного, так и пересеченного рельефа.

Однако системы, в которых компьютер используется для выработки проектных ре-

шений по плану и профилю дорог на основе адекватных математических моделей и алгоритмов оптимизации, практически не применяются в силу целого ряда причин. Сложился миф о том, что оптимизация не нужна, так как проектировщик в интерактивном режиме и без того находит оптимальные решения методом перебора интуитивно назначаемых вариантов. Этой уверенностью можно объяснить и отсутствие публикаций о разработке математических методов оптимизации для новых версий импортных САПР. Однако факт того, что при проектировании дорог в сложных условиях рельефа и геологии каждый проектировщик «видит» свое решение, и при этом разброс решений неприемлемо велик, установил еще в 1976 г. Ю. С. Карих в рамках специальной НИР, выполненной в ГипродорНИИ РСФСР [13]. Различные специалисты независимо друг от друга, располагая идентичным заданием с исходными данными, в плановом порядке выполнили проектирование участка продольного профиля новой автодороги при заданном положении трассы в плане. Разброс в решениях достигал нескольких метров [13].

Трудно рассчитывать на существенные изменения в качестве проектных решений в современных САПР, не использующих алгоритмы оптимизации. Как было установлено еще в 1970-х гг. [1], оптимизация проектов таких дорогостоящих сооружений, как железные и автомобильные дороги, может дать экономический эффект, многократно превосходящий затраты на разработку соответствующих проектирующих систем. В этой связи представляется целесообразным развитие проектирующих систем, созданных в нашей стране на основе математически корректных алгоритмов компьютерной выработки проектных решений.

Изложение новых алгоритмов решения ряда вариационных задач, возникающих в проектировании трасс линейных сооружений, является целью настоящей статьи.

Особенности вариационных задач проектирования плана и профиля

Основная особенность вариационных задач проектирования плана и профиля трасс линейных сооружений состоит в том, что искомая экстремаль (сплайн) должна состоять из элементов заданного вида, на параметры которых накладываются ограничения в виде неравенств. Используются отрезки прямых, парабол, окружностей и клотоид. При этом очень важно, что число искомых элементов неизвестно. Это существенно усложняет задачу.

Другим осложняющим обстоятельством является то, что искомый сплайн не обязан быть однозначной функцией в отличие от рассматриваемых в теории сплайнов, элементы которых являются полиномами [14].

Решенные ранее задачи проектирования оптимального продольного профиля дорог и других линейных сооружений при заданном положении трассы в плане сводились к одноэкстремальным задачам нелинейного программирования с линейной системой ограничений [6]. Поэтому проектировщику не требовалось задавать начальное приближение. Но совместное проектирование плана и продольного профиля трассы — это многоэкстремальная задача с нелинейной целевой функцией и системой ограничений [6]. Математических методов, гарантирующих достижение окрестности глобального минимума при решении таких задач, нет. Поэтому разработанные для этой цели математические модели [6] основаны на использовании начального приближения и фактически речь идет о достижении локального минимума, то есть об оптимизации решения, предложенного проектировщиком, что в сложных условиях рельефа и геологии тоже имеет смысл. При этом проектировщику не нужно выполнять детальный расчет трассы, так как достаточно задать последовательность то-

чек, которую компьютер должен преобразовать в сплайн требуемого вида с минимальными (в заданном смысле) отклонениями. Самостоятельное значение имеет и задача проектирования плана трассы на этапе реконструкции железных и автомобильных дорог. Далее рассматривается именно эта задача построения сплайна, удовлетворяющего ряду ограничений и наилучшим образом (в заданном смысле) аппроксимирующего последовательность точек.

Формализация задачи

Искомая кривая представляет собой последовательность элементов: прямая, клотоида, окружность, клотоида, прямая и т. д. (рис. 1).

На рисунке 1 AB , EF — левые клотоиды, CD — правая клотоида, DE — прямая вставка, θ — угол поворота. Кривизна клотоиды как функция длины изменяется линейно от 0 до $1/R$, где R — радиус окружности. Поэтому в точках сопряжения элементы имеют не только общую касательную, но и равную кривизну. Последовательно соединяя прямыми заданные аппроксимируемые точки, строим исходную ломаную линию, которая получила название «цепочка» (см. рис. 1). Считаются заданными начальная и конечная точки искомого сплайна, а также начальное и конечное направления.

В вершинах «цепочки» построим нормали, т. е. прямые от каждой вершины к центру окружности, соединяющей три смежные точки (рис. 2). Запомним углы γ_i нормалей с осью OX . Задаем дискрет поиска Δ . На каждой нормали в обе стороны от точки съемки отложим равное число дискретов и вычислим координаты полученных точек. Таким образом будет определена область поиска. Точки упорядочим так, чтобы наибольший номер получила точка, которая при движении по направлению нормали наиболее удалена от исходной точки (см. рис. 2).

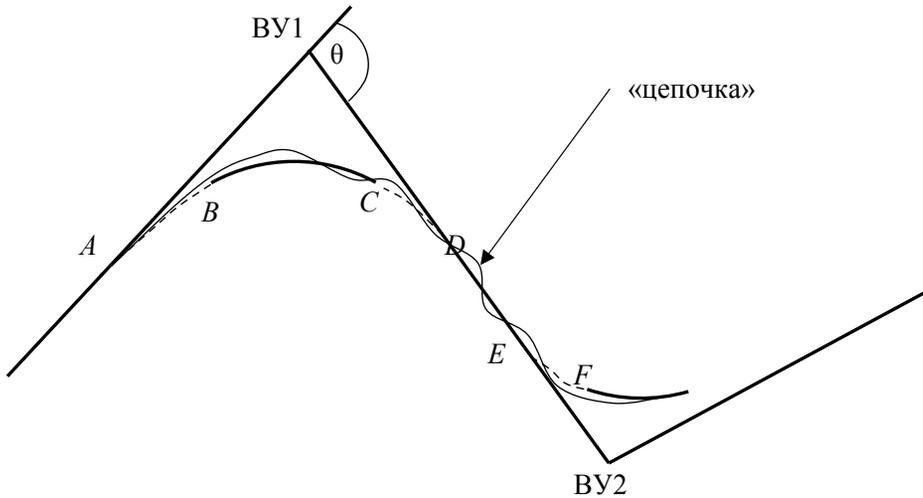


Рис. 1. Элементы плана трассы
Fig. 1. The elements of the route plan

Требуется найти сплайн, для которого минимальна сумма квадратов расстояний h_i от заданных точек до точек пересечения со сплайном нормалей к «цепочке», то есть

$$\min \sum_{i=1}^n h_i^2, \text{ где } n \text{ — количество нормалей.}$$

При этом должны быть выполнены следующие ограничения:

1. На радиус окружности R : $R_{\min} \leq R \leq R_{\max}$.
2. На длины клотоид: $S_{\text{кл min}} \leq S_{\text{кл}} \leq S_{\text{кл max}}$ и окружностей $S_{\text{окр min}} \leq S_{\text{окр}} \leq S_{\text{окр max}}$.
3. На длину прямой вставки $S_{\text{пр min}} \leq S_{\text{пр}}$.

Дополнительно могут быть заданы:

- минимальный угол поворота;
- диапазон значений скорости изменения кривизны каждой клотоиды. Кривизна клотоиды σ линейно зависит от длины s , отсчитываемой от точки с нулевой кривизной $\sigma = ks$. Величина k должна удовлетворять условию

$$k_{\min} \leq |k| \leq k_{\max}.$$

При $\sigma < 0$ (поворот клотоиды по часовой стрелке) $k < 0$.

Понадобятся еще две величины: S_{\min} и S_{\max} . Это минимальная и максимальная суммарная

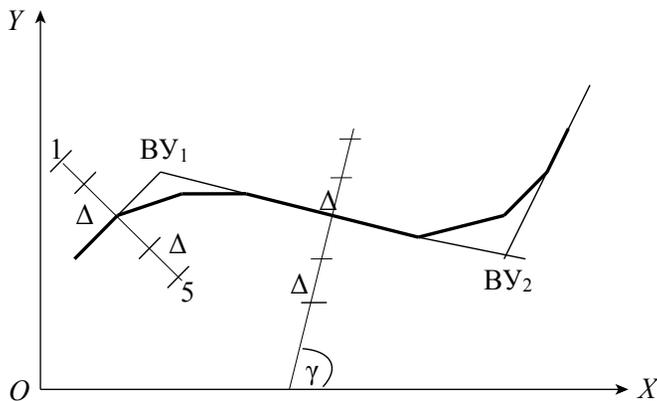


Рис. 2. «Цепочка», нормали и их разбиение
Fig. 2. «Chain», normals and their splitting

длина кривой от одного состояния системы до другого. На рисунке 1 длина кривой — это $AB + BC + CD + DE$.

$$S_{\min} = 2S_{\text{кл min}} + S_{\text{окр min}} + S_{\text{пр min}}$$

Значение S_{\max} , так же как дискретности Δ , φ и их количества при разбивке нормалей и формировании состояний системы, будем считать входными параметрами, с тем чтобы определить их экспериментально при накоплении опыта эксплуатации программы.

В силу отмеченных выше особенностей задачи мы не имеем аналитического выражения для целевой функции от тех или иных параметров, которые определяют искомым сплайн. Однако для каждого сплайна требуемого вида можно проверить выполнение всех ограничений и, если они выполнены, можно вычислить все расстояния h_i , а затем и значение целевой функции.

Многokrратно решаемые вспомогательные задачи

Важно отметить, что ограничение на длину прямой вставки создает взаимосвязь соседних кривых (см. рис. 1), что не позволяет даже при известном положении вершин углов поворота (ВУ) решать задачу поиска радиуса и длин клотоид для каждого угла отдельно из условия наилучшей аппроксимации. Однако эта взаимосвязь исчезает, если известно начало левой клотоиды для следующего угла (точка Е на рис. 1). В этом случае в пределах каждого угла можно попытаться подобрать радиус круговой кривой и длины переходных кривых, обеспечивая необходимую длину прямой вставки. Это известная задача «вписать кривую в угол». Поэтому будем стремиться исходную вариационную задачу поиска сплайна свести к определению координат всех ВУ при заданных начальных точках левых клотоид.

В практике задача «вписать кривую в угол» решается при заданном радиусе. Нам же требуется найти радиус окружности и длины кло-

тоид. Рассмотрим, как определить радиус кривой R и длину клотоиды s (см. рис. 2), соблюдая все ограничения и минимизируя сумму квадратов отклонений от вершин «цепочки», взятых по построенным ранее нормалям.

Начало левой клотоиды (точка А на рис. 1) известно. С достаточной для практики точностью ее расстояние T от ВУ при угле поворота θ дается формулой [6]:

$$T = (R + s^2/6/R) \operatorname{tg}(\theta/2) + s/2. \quad (2)$$

Расстояние от ВУ до начала левой клотоиды на другой стороне угла также известно, что дает возможность проверить ограничение по минимальной прямой вставке, еще до вычисления отклонений кривой от «цепочки».

Имеем одно уравнение с двумя неизвестными. Длина клотоиды s в практике принимается кратной 10 м.

Для того чтобы уравнение (2) имело решение относительно R , необходимо:

$$s < T / \left(0,5 + \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{6/3} \right).$$

Соответственно, для R имеем формулу:

$$R = \frac{3(2T-s) + \sqrt{9(2T-s)^2 - 24 \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^2}}{12 \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (3)$$

Поскольку неизвестно, имеет ли целевая функция локальные минимумы, будем перебирать значения s , начиная с наименьшего, вычислять R по формуле (3) и проверять все ограничения, в том числе по радиусу, по параметру клотоиды k и минимальной длине дуги окружности.

При устройстве клотоид длиной s окружность радиуса R , вписанная в угол θ , сдвигается по биссектрисе внутрь угла, и ее длина уменьшается на s . Поэтому должно выполняться неравенство $R\theta - s \geq S_{\text{окр min}}$. Если все ограничения выполнены, вычисляем

сумму квадратов отклонений по нормальям от «цепочки» в пределах рассматриваемого угла, включая прямую вставку на следующей стороне угла (на рис. 1 от точки *A* до точки *E*). Сумму запоминаем, увеличиваем *s* на 10 м и повторяем расчет.

Может оказаться, что дальнейшее увеличение *s* смысла не имеет. В этом случае или по исчерпанию перебора запоминаем *s* и *R*, которые соответствуют минимальной сумме.

Расчет отклонений требует поиска пересечения нормалей с клотоидой, окружностью и прямой. В двух последних случаях вопрос решается просто. А для поиска пересечения нормали и дуги клотоиды приходится организовывать итерационный процесс, например, заменяя клотоиду двумя хордами, вычислять пересечение нормали с каждой из них и оставлять для дальнейшего только одну хорду, которая пересекается с нормалью, делить ее пополам и т. д., пока длина интервала поиска не станет меньше требуемой точности (в расчетах принималось 0,001 м). При этом для вычисления декартовых координат точек клотоид приходится использовать степенные ряды и выполнять пересчет координат из одной системы в другую.

В декартовой системе координат с центром в точке нулевой кривизны клотоиды и осью *X*, совпадающей со стороной угла поворота и направленной в сторону возрастания длины клотоиды, координаты точек клотоиды, как функции ее длины, выражаются быстро сходящимися рядами

$$x = s(1 - \frac{s^4}{40}k^2 + \frac{s^8}{3456}k^4 - \dots).$$

$$y = \frac{s^3k}{6} (1 - \frac{s^4}{56}k^2 + \frac{s^8}{7040}k^4 - \dots).$$

В целом отдельные подпрограммы решают следующие задачи:

- вычисление координат точек пересечения двух отрезков прямой;
- вычисление координат ВУ и угла поворота θ ;

- расчет радиуса окружности и проверка ограничений;
- вычисление координат точки пересечения нормали и окружности;
- вычисление координат точки пересечения нормали и клотоиды;
- вычисление суммы квадратов расстояний от исходных точек до сплайна по нормальям.

Алгоритм поиска оптимального сплайна

Рассмотрим далее новый алгоритм динамического программирования для решения задачи автоматического поиска ВУ и вписанных кривых.

Ключевое понятие в динамическом программировании — это состояние системы [15]. На каждом шаге поиска система может находиться в разных состояниях. Последовательность выбранных на каждом шаге состояний образует траекторию (путь). Понятие «состояние системы» надо формализовать так, чтобы различные пути, приводящие в одно и то же состояние, были сравнимы, то есть множества их возможных продолжений должны совпадать. Тогда в каждом состоянии можно оставить только один, приводящий в него путь, наилучший по выбранному критерию.

Состояние системы определим как точку на нормали, которая будет началом очередной *левой* клотоиды (на рис. 1 это клотоиды *AB* и *EF*) плюс направление стороны угла поворота, которой принадлежит эта точка. Таким образом, будем искать начало каждой клотоиды среди точек нормалей, которые покрывают всю область поиска сплайна.

Для возможных направлений сторон угла зададим дискрет ϕ по углу и в каждой исходной точке зададим диапазон углов. Для этого от угла касательной $\gamma_i + \pi/2$ в обе стороны отложим равное число дискретов ϕ . Тем самым в каждой точке нормали образуется веер направлений.

После нахождения координат ВУ для правильного вычисления угла поворота θ , возможно, придется изменить направление определяемой стороны угла поворота на обратное, так как она должна быть направлена от ВУ в точку нового состояния.

Определим для каждой нормали структуру NORMAL. Число нормалей равно n , поэтому можно определить массив из n таких структур. Полями структуры NORMAL будут угол нормали с осью ОХ, сумма длин всех предшествующих элементов «цепочки» и массив структур отмеченных на данной нормали точек ТОЧН. Каждая такая структура содержит координаты точки и массив структур UGL. Каждая структура UGL содержит угол с осью ОХ соответствующего варианта стороны угла поворота, проходящей через данную точку. Точка плюс этот угол дают новое состояние. Кроме того, в структуре UGL нового состояния запоминаются суммарное значение целевой функции для достижения этого состояния из начальной точки, номер нормали, с которой связано данное состояние, соответствующий номер точки на этой нормали и адрес структуры типа UGL в этой точке (адрес связи). Во избежание повторных вычислений при обнаружении допустимой связи записываются, а потом при сравнении вариантов, возможно, и корректируются координаты ВУ, радиус, длины клотоид, координаты концов клотоид.

Дополнительно создаем структуры типа UGL для начальной и конечной точек.

При инициализации все адреса связи обнуляются.

Перейти из одного состояния в другое, то есть связать два состояния означает построить соответствующий угол поворота и вписать в него наилучшую из допустимых кривую (клотоида + окружность + клотоида + прямая вставка).

На первом шаге алгоритма есть единственное начальное состояние. Его пытаемся связать со всеми состояниями, отстоящими

от него (по «цепочке») не ближе, чем на S_{\min} и не дальше, чем на S_{\max} . Для этого придется решать упомянутые выше вспомогательные задачи. Для всех успешных попыток запоминаем в каждом из достигнутых состояний адрес структуры UGL начального состояния. Если связь не допустима, то этот адрес связи остается равным нулю.

Последующие шаги алгоритма не значительно отличаются от первого. Они состоят в следующем:

На каждой из нормалей, начиная от S_{\min} , рассматриваем последовательно все состояния и для каждого из них выполняем действия как на первом шаге. Имеются следующие отличия:

- состояние исхода (обозначим его для определенности через А) должно быть достижимым, то есть иметь связь с каким-то из предшествующих состояний, иначе оно не рассматривается;

- состояние, с которым устанавливается связь (обозначим его для определенности через В), должно быть не ближе, чем на S_{\min} от конечной точки трассы;

- если при установлении связи с состоянием В выясняется, что в нем уже записана связь с некоторым предшествующим состоянием С (рис. 3), то сравниваются по целевой функции варианты связи АВ и СВ. При этом значения целевой функции должны соответствовать достижению состояния В из начальной точки трассы. Для состояния В в итоге будут записаны состояние, из которого возможен переход в него, при котором суммарное (то есть от начала трассы) значение целевой функции минимально, и само это значение.

Такие сравнения в состоянии В могут выполняться многократно, тогда как на первом шаге сравнивать было нечего.

По завершении описанного процесса выполняется построение последнего угла поворота.

Для этого все состояния на всех нормалях, отстоящих от конечной точки не дальше

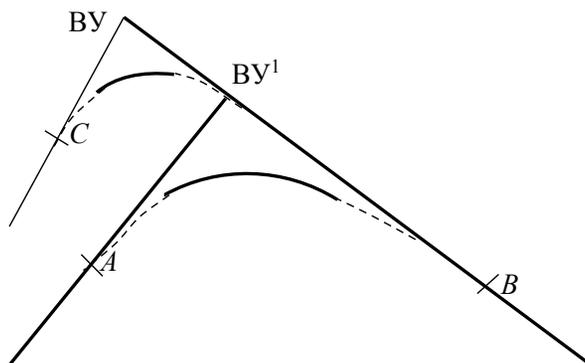


Рис. 3. Сравнение и отбраковка вариантов перехода в состояние B
Fig. 3. Comparison and rejection of options for the transition to state B

чем на S_{max} и не ближе чем на S_{min} , последовательно связываются с конечным состоянием. Если связь возможна, то для нее вычисляется значение целевой функции. При наличии нескольких таких связей они сравниваются по суммарному значению целевой функции, и наилучшая связь и значение целевой функции запоминается.

Если задано несколько конечных состояний, то эти действия выполняются последовательно для каждого из них. Наилучший вариант запоминается, для него записывается связь с предшествующим состоянием и суммарное значение целевой функции.

Восстановление сплайна

В результате работы описанного алгоритма наименьшее суммарное значение целевой функции будет известно, а для восстановления искомого сплайна есть необходимая информация.

Обратным разворотом, начиная с конечного состояния, последовательно рассматриваем связи с предшествующими состояниями, то есть записанную для каждого достижимого состояния информацию, включая адрес связи. Доходим до связи с начальным состоянием и формируем информацию о сплайне для дальнейшего использования.

Заключение

Изложенный алгоритм может после несложных упрощений использоваться и для решения задач поиска сплайнов, которые не обязаны удовлетворять требованию непрерывности кривизны. В этом случае нет необходимости в клотоидах или каких-либо других элементах переходной кривизны, что существенно упрощает задачу.

Так, план и продольный профиль траншей для прокладки трубопроводов различного назначения проектируются как последовательность: прямая, окружность, прямая и т. д.

Аналогично проектируется план автодорог низких категорий, например, лесовозных, не предназначенных для движения с высокими скоростями. При компьютерном проектировании таких объектов состоянием системы следует считать начало окружности и направление касательной к ней (сторона угла). После определения ВУ и угла поворота для каждого состояния радиус окружности определяется однозначно.

Несмотря на отсутствие в настоящее время заинтересованных пользователей, оснащение САПР линейных сооружений проектирующими программами, использующими математически корректные алгоритмы оптимизации, может стать актуальным. Дело в том, что при современных вычислительных

возможностях такие проектирующие программы становятся эффективными не только из-за повышения качества проектов и, соответственно, снижения затрат труда и средств в строительстве, что не является актуальным для проектировщиков, но и потому, что новая технология имеет преимущество перед принятым в импортных САПР и их российских аналогах проектированием трасс в графическом режиме, которое иногда образно называют «ползанием по экрану».

Список литературы

1. Струченков В. И., Баранов М. А., Рабинович В. С. Использование математических методов оптимизации и ЭВМ при проектировании продольного профиля железных дорог. М.: Транспорт. 1977. — 169 с.
2. Зейферт Г., Трельфаль В. Вариационное исчисление в целом. М.: РХД, 2000. — 285 с.
3. Болдырев Ю. Я. Вариационное исчисление и методы оптимизации. М.: Юрайт, 2018.
4. Ляховский В. Н., Михалевиц В. С., Быков В. И. Определение на ЭВМ наилучшего положения красной линии продольного профиля на вольном ходу // Транспортное строительство. 1962. № 4. С. 41–43.
5. Михалевиц В. С., Шор Н. З. Математические основы решения задачи выбора оптимального продольного профиля (Труды Всесоюзного НИИ транспортного строительства. вып. 51). М.: Транспорт, 1964. С. 12–24.
6. Струченков В. И. Методы оптимизации трасс в САПР линейных сооружений. М.: Солон-Пресс, 2014. — 271 с.
7. Шейдвассер Д. М. Оптимизация трассы железных дорог на напряжённых ходах // Автоматизация проектирования объектов транспортного строительства. Сб. научных трудов ВНИИ трансп. стр-ва. М.: Транспорт. 1986. С. 16–29.
8. Bentley Rail Track. URL: <http://www.bentley.com/>.
9. CARD/1. URL: <http://www.card-1.com/en/home/>.
10. Autodesk. URL: <https://www.architect-design.ru/autodesk/autocad/>.
11. Topomatic Robur. URL: <https://www.topomatic.ru>.
12. Credo-Dialog. URL: <https://credo-dialogue.ru/>.
13. Карих Ю. С. Оценка существующих методов проектирования продольного профиля // Сборник трудов ГипродорНИИ № 17. Повышение экономической эффективности капиталовложений в строительство, ремонт и содержание автомобильных дорог. М., 1976. С. 12–24.
14. Альберт Дж., Нильсон Э., Уолли Дж. Теория сплайнов и её приложения. пер. с англ. М.: Мир, 1972. — 316 с.
15. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ., 1960. — 402 с.

References

1. Struchenkov V. I., Baranov M. A., Rabinovich V. S. *Ispol'zovaniye matematicheskikh metodov optimizatsii i EVM pri proyektirovaniy prodol'nogo profilya zheleznykh dorog* [Use math optimization methods and computers when designing a longitudinal profile of railways]. Moscow, Transport Publ., 1977, 169 p.
2. Zeyfert G., Trel'fall' V. *Variatsionnoye ischisleniye v tselom* [Calculus of variations in general]. Moscow, RKHD Publ., 2000, 285 p.
3. Boldyrev Y. A. *Variatsionnoye ischisleniye i metody optimizatsii* [Calculus of variations and optimization methods]. Moscow, Yurayt Publ., 2018, 240 p.
4. Lyakhovskiy V. N., Mikhalevich V. S., Bykov V. I. *Opre-deleniye na EVM naivuygodneyshego polozheniya krasnoy linii prodol'nogo profilya na vol'nom khodu* [Definition on a computer best position of the red line of the longitudinal profile at free motion]. *Transportnoye stroitel'stvo* — Transport construction, 1962, no. 4, pp. 41–43.
5. Mikhalevich V. S., Shor N. Z. *Matematicheskiye osnovy resheniya zadachi vybora optimal'nogo ochertaniya prodol'nogo profilya* [Mathematical foundations for solving the Transport construction problem of choice optimal outline of the longitudinal profile]. *Trudy Vsesoyuznogo NII Transportnogo stroitel'stva*, 1964, no. 51, pp. 12–14.
6. Struchenkov V. I. *Metody optimizatsii trass v SAPR lineynykh sooruzheniy* [Methods to ptimize the routes in CAD linear structures]. Moscow, Solon-Press Publ., 2014, 271 p.
7. Sheydvasser D. M. *Optimizatsiya trassy zheleznykh dorog na apyazhonnnykh khodakh* [Optimization of the route of the railways on tight passages]. *Sbornik nauchnykh trudov VNII Transportnogo stroitel'stva «Avtomatizatsiya proyektirovaniya ob»yektov transportnogo stroitel'stva* [Proc. of the All Union Institute of Transport Construction «Optimization of the route of the railways on tight passages»], 1986, pp. 16–29.
8. Bentley Rail Track. URL: <http://www.bentley.com/>.
9. CARD/1. URL: <http://www.card-1.com/en/home/>.
10. Autodesk. URL: <https://www.architect-design.ru/autodesk/autocad/>.
11. Topomatic Robur. URL: <http://www.topomatic.ru>.
12. Credo-Dialog. URL: <https://credo-dialogue.ru/>.
13. Karikh Y. S. *Otsenka sushchestvuyushchikh metodov proyektirovaniya prodol'nogo profilya* [Evaluation

- of existing longitudinal profile design methods]. *Sbornik trudov GiprodorNII. Povysheniye ekonomicheskoy effektivnosti kapitalovlozheniy v stroitel'stvo, remont i sodержaniye avtomobil'nykh dorog* [Proc. of the GiprodorNII «Improving the economic efficiency of investment in the construction, repair and maintenance of roads»], 1976, no. 17, pp. 105–112.
14. Alberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. The Theory of Splines and Their Application. New York, Academic Press, 1967, 316 p. (Russ. Ed. Al'bert Dzh., Nil'son E., Uolsh Dzh. *Teoriya splaynov i yeyo prilozheniya*). Moscow, Mir, 1972, 316 p.
15. Bellman R. Dynamic Programming. Princeton University Press Princeton, New Jersey, 1957, 402 p. (Russ. Ed. Bellman R. *Dinamicheskoye programirovaniye*. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1960, 402 p.).

D. Karpov, Institute of Cybernetics of the Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russia, Karpov@mirea.ru

V. Struchenkov, Institute of Cybernetics of the Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russia, str1942@mail.ru

The variational problems in linear structures routing

In linear structures routing we have the following problem: find the extremal of given functional, i.e 2D or 3D curve, which must consist of a special type elements. The parameters of elements are limited and their number is unknown. At first we must determine number of elements and after this we can find their optimal parameters. In the case of 2D extremal we shall consider a broken line and parabolic spline. The broken line is used as a longitudinal profile of railways and the parabolic spline is used as a longitudinal profile of roads. Initial problem was solved as multi-stage process using the methods of dynamic and nonlinear programming. On each stage we consider the different mathematical models of unknown extremal line:

1. A broken line with short elements similar to longitudinal profile of ground. This model allow us to find the initial approximation of unknown line using nonlinear programming.
2. The result of first stage give us opportunity to find number of elements using dynamic programming.
3. We use a special algorithm of nonlinear programming for solving initial problem with fixed number of elements and the result of second stage as initial approximation.

In this article our purpose is to give a new algorithm for transformation a broken line to another line, which is the following spline: straight, clotoida, circle, clotoida, straight and so on. This algorithm is one of the implementations of dynamic programming. It can be used both in the design of new roads and in their reconstruction, as well as in the design of trenches for pipelines of various purposes.

Keywords: Functional, extremal, spline, restrictions, nonlinear programming, dynamic programming.

About authors: D. Karpov, *PhD in Technique*; V. Struchenkov, *Dr of Technique*

For citation: Karpov D., Struchenkov V. The variational problems in linear structures routing.

Prikladnaya informatika — Journal of Applied Informatics, 2019, vol. 13, no. 1 (73), pp. 47–57 (in Russian).